

Математика и математическое моделирование.
2020. № 1. С. 16–32.

DOI: [10.24108/mathm.0120.0000216](https://doi.org/10.24108/mathm.0120.0000216)



© Виноградова М.С., Канатников А.Н., Ткачева
О.С., 2020.

Математика Математическое моделирование

Сетевое научное издание

<http://mathmelpub.ru>

ISSN 2412-5911

УДК 517.977+519.711.3

Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля

Виноградова М.С.¹, Канатников А.Н.¹, Ткачева О.С.^{1,2,*}

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

* mathmod@bmstu.ru

В работе решена задача построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки для двумерной динамической системы с выходом общего вида. С помощью полученных результатов построен асимптотический наблюдатель состояния для двух моделей работы кардиостимулятора, основанных на нелинейном осцилляторе Ван дер Поля. Аналитические выкладки подтверждаются результатами вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: Кардиостимулятор; наблюдатель состояния; ошибка наблюдателя; канонический наблюдаемый вид; уравнение Ван дер Поля.

Представлена в редакцию: 09.03.2020.

Введение

Первая известная модель электрической активности сердца была предложена нидерландским физиологом и основоположником электрокардиографии В. Эйнтховеном [1]. Позже Ван дер Поля и Ван дер Марк [2] построили модель сердца, где сердцебиение рассматривается как релаксационное колебание. Эта идея была развита в ряде работ, в которых проводящая система сердца моделируется как связанные нелинейные релаксационные осцилляторы [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Осциллятор на основе уравнения Ван дер Поля может быть использован для моделирования работы кардиостимуляторов [5, 6, 10].

В данной работе мы ограничимся моделированием только одного узла в работе сердца — сино-атриального узла (САУ), являющегося основным кардиостимулятором сердца [11].

Релаксационный генератор активно используется для моделирования деятельности кардиостимулятора сердца [4, 5, 6, 10]. Моделью релаксационного генератора мы выбираем известное уравнение Ван Дер Поля.

Многие алгоритмы управления динамическими системами базируются на обратной связи, использующей полный вектор состояния динамической системы. Однако на практике

это условие выполняется далеко не всегда. Так, в случае электрической активности сердца измеряют потенциалы узлов, в то время как скорости изменения потенциалов напрямую не измеряются. Для восстановления полного вектора состояния по измерениям применяют различные приемы, один из самых популярных — использование наблюдателей состояния.

Теория наблюдателей давняя, в этом направлении колоссальное количество работ. Наиболее развита тема асимптотических наблюдателей, для линейных полностью определенных систем задача построения наблюдателей решена полностью. В нелинейном случае решение есть лишь для определенных классов систем [12, 13, 14, 15].

В данной работе мы остановимся на задаче построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки [13, 16]. Необходимым условием существования такого наблюдателя является наблюдаемость системы, но это условие не является достаточным. Достаточные условия можно сформулировать в рамках дифференциально-геометрического подхода [16] с использованием идей двойственности [16, 17]. В этом подходе также можно дать алгоритм построения наблюдателя. Однако соответствующая техника трудная и на практике может вызвать затруднения. Для двумерных систем этот подход удастся упростить. Решив общую задачу построения наблюдателя для двумерных систем, мы применяем полученные результаты для модели кардиостимулятора на основе осциллятора Ван дер Поля.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 мы опишем модель кардиостимулятора в виде двумерной динамической системы, базирующейся на модифицированном уравнении Ван дер Поля. В разд. 2 мы приводим общую теорию построения наблюдателей с линейной динамикой ошибки. В разд. 3 мы даем решение задачи построения наблюдателя для двумерной системы. В разд. 4 мы строим наблюдатель для двух моделей кардиостимулятора. В разд. 5 мы показываем результаты вычислительных экспериментов. Заключение завершает работу.

1. Модель кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля

Известное уравнение Ван дер Поля, описывающее простейший осциллятор с нелинейным затуханием, имеет следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - \mu)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1)$$

Для моделирования работы кардиостимулятора предложено модифицировать уравнение Ван дер Поля (1), заменяя в нем третье слагаемое [5]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - \mu)\frac{dx}{dt} + \frac{x(x+d)(x+e)}{de} = 0, \quad (2)$$

где d, e, μ, α — положительные параметры. Также полагаем, что $\mu < d$.

Подобная замена приводит к усложнению динамики системы. В частности, если классическое уравнение Ван дер Поля (1) имеет одну особую точку $x = 0$, то уравнение (2) имеет уже три особые точки разного типа: неустойчивый фокус, седло и устойчивый узел [5].

Мы также используем дополнительную модификацию уравнения, заменяя в (2) слагаемое $\alpha(x^2 - \mu)$, отвечающее за демпфирование, выражением $\alpha(x - v_1)(x - v_2)$ [5]. Получим другое обобщение уравнения Ван дер Поля вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x - v_1)(x - v_2)\frac{dx}{dt} + \frac{x(x + d)(x + e)}{de} = 0, \quad (3)$$

где $v_1 v_2 < 0$ (противоположные знаки параметров позволяют сохранить автоколебательные свойства системы).

Уравнения (2) и (3) дают нам две модели кардиостимулятора, в которых фазовыми переменными являются трансмембранный потенциал узла x и скорость его изменения $\frac{dx}{dt}$. Предполагается, что скорость изменения потенциала является неизмеряемой величиной. Иначе говоря, выходом системы является переменная x . Для восстановления двумерного вектора состояния будем строить наблюдатель состояния с линейной динамикой ошибки. Для этого систему необходимо преобразовать к специальному каноническому виду.

2. Наблюдатель состояния с линейной динамикой ошибки

Рассмотрим многомерную динамическую систему с выходом общего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x), \\ y = h(x), \end{cases} \quad (4)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$; $a_i \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, n}$; $h \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

Наблюдателем состояния для системы (4) называют динамическую систему $\dot{\eta} = f(\eta, y)$, вектор состояния которой дает оценку вектора состояния $x(t)$ исходной системы. Наблюдатель строится таким образом, чтобы отклонение $|\eta(t) - x(t)|$ стремилось к нулю при $t \rightarrow +\infty$ [16]. Мы рассматриваем случай системы со скалярным выходом, т.е. $y \in \mathbb{R}$.

Один из подходов к построению наблюдателя состояния для нелинейной системы (4) базируется на преобразовании этой системы к так называемому каноническому наблюдаемому виду [14, 16, 18].

Согласно [16], каноническим наблюдаемым видом называют систему с выходом следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dots \\ \dot{z}_n = f(z); \\ y = z_1. \end{cases}$$

Этот вид будем называть, так же как и в линейном случае [12], первым каноническим наблюдаемым видом. Он, к сожалению, не подходит для построения наблюдателя.

Для построения наблюдателя больше приспособлен второй канонический наблюдаемый вид, под которым мы понимаем следующую динамическую систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \psi_1(y), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \psi_2(y), \\ \dots \\ \dot{\xi}_n = \xi_{n-1} + \psi_n(y); \\ y = \xi_n. \end{cases}$$

В векторной форме ее можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = D\xi + \psi(\xi_n), \\ y = \xi_n, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(y) = \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \\ \vdots \\ \psi_n(y) \end{pmatrix}.$$

Как видим, второй канонический вид отличается от первого наличием нелинейной (в общем случае) добавки $\psi(y)$, обратным ходом переменных и упрощенным видом правой части в первой переменной.

Третий канонический наблюдаемый вид является некоторым обобщением второго, состоящим в том, что выход есть некоторая функция от базовой переменной ξ_n :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = D\xi + \psi(\xi_n), \\ y = H(\xi_n), \end{cases} \quad (6)$$

где H – некоторая гладкая (вообще говоря, нелинейная) функция одного переменного. Далее мы будем предполагать, что в своей области определения эта функция удовлетворяет условию $H'(y) \neq 0$. Отсюда, в частности следует, что она имеет обратную функцию $x = H^{-1}(y)$.

Согласно [17], наблюдатель с линейной динамикой ошибки для системы (6) имеет следующий вид:

$$\dot{\eta} = D\eta + G(C\eta - H^{-1}(y)) + \psi(H^{-1}(y)), \quad (7)$$

где $C = (0, 0, \dots, 1)$ — числовая вектор-строка; G — числовой вектор-столбец, выбираемый так, что спектр матрицы $D + GC$ лежит в левой полуплоскости (см. также [16, с. 423]). В этом случае ошибка наблюдателя $e = \eta - \xi$, которая удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{e} = (D + GC)e,$$

экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Техника подбора вектор-столбца G , обеспечивающего нужный спектр матрицы $D + GC$, хорошо разработана в линейной теории [19, 20].

Нетрудно проверить, что ранг матрицы наблюдаемости для системы (6) равен ее размерности n . Поэтому необходимым условием приводимости исходной системы (4) к виду (6) является ранговое условие наблюдаемости $\text{rank } W(\mathbf{x}) = n$, где

$$W(\mathbf{x}) = \frac{\partial \omega(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad \omega(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h(\mathbf{x}) \\ \dot{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h^{(n-1)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

$\dot{h}(\mathbf{x}), \ddot{h}(\mathbf{x}), \dots, h^{(n-1)}(\mathbf{x})$ — последовательные производные функции $h(\mathbf{x})$ в силу системы (4) до порядка $n - 1$ включительно.

Чтобы получить достаточные условия приводимости системы к третьему наблюдаемому виду и способ построения такого вида, можно воспользоваться теорией $k(x)$ -двойственности [17]. Теория позволяет перейти от свойств наблюдаемости системы с выходом к свойству управляемости двойственной системы с управлением (управляемой системы), а свойства управляемости оказываются более удобными для проверки и использования.

Аффинная динамическая система со скалярным управлением имеет следующий вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})u, \quad (8)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$,

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ a_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_1(\mathbf{x}) \\ b_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ b_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad a_i, b_i \in C^\infty(\Omega), \quad i = \overline{1, n}; \quad \Omega \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $k \in C^\infty(\Omega)$ — гладкая функция. Системы (4) и (8) называют $k(x)$ -двойственными в области Ω , если выполнены условия:

$$L_B L_A^r h(\mathbf{x}) = 0, \quad r = \overline{0, n-2}; \quad L_B L_A^{n-1} h(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где $L_A f$ обозначает производную Ли функции f вдоль векторного поля A , символы A и B обозначают векторные поля, которые в заданной системе координат записываются как функции $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$.

Используя запись производной Ли в координатах, условия (9) можно переписать в матричной форме [16, с. 426]:

$$W(\mathbf{x})B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Условия (9) показывают, что свойство $k(\mathbf{x})$ -двойственности является инвариантным относительно выбора системы координат. В то же время равенство (10) показывает, что любая наблюдаемая система имеет $k(x)$ -двойственную систему: обе системы включают одну и ту же вектор-функцию $A(\mathbf{x})$, а вектор-функция $B(\mathbf{x})$ может быть найдена из уравнения (10), которое является матричной записью системы линейных уравнений относительно координатных функций $b_i(\mathbf{x})$. При этом функция $k(\mathbf{x})$ может быть выбрана произвольно.

Для системы (8) векторное поле B совместно с векторным полем A порождает семейство векторных полей

$$B, \quad -\operatorname{ad}_A B, \quad \operatorname{ad}_A^2 B, \quad \dots, \quad (-1)^{n-1} \operatorname{ad}_A^{n-1} B, \quad (11)$$

где $\operatorname{ad}_A B = [A, B]$ — коммутатор двух векторных полей (или, по-другому, производная Ли векторного поля B вдоль векторного поля A). Это семейство позволяет сформулировать достаточные условия приводимости системы (4) к третьему каноническому наблюдаемому виду.

Теорема 1 ([16, с. 441]). Для того чтобы локально наблюдаемая динамическая система (4) в окрестности заданной точки \mathbf{x}_0 приводилась к третьему наблюдаемому каноническому виду (6), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $k(\mathbf{x}) = P(h(\mathbf{x}))$, где P — гладкая знакопостоянная функция одного переменного, что для соответствующей $k(x)$ -двойственной системы поля семейства (11) попарно коммутируют.

Двойственная система позволяет найти и преобразование, с помощью которого система с выходом приводится к каноническому виду.

Теорема 2 ([16, с. 444]). Пусть динамическая система (4) с помощью замены переменных $\mathbf{x} = T(\boldsymbol{\xi})$ преобразуется к третьему наблюдаемому каноническому виду (6). Тогда матрица Якоби отображения T совпадает с матрицей управляемости $k(x)$ -двойственной системы, где $k(\mathbf{x}) = H'(H^{-1}(h(\mathbf{x})))$.

Согласно теоремам 1, 2, чтобы для системы с выходом (4) построить наблюдатель с линейной динамикой ошибки, необходимо выполнить следующие шаги.

1. Составить матрицу наблюдаемости $W(\mathbf{x})$ и проверить ее ранг, при неполном ранге задача решения не имеет.

2. Ввести знакопостоянную функцию $P(x)$, построить $k(x)$ -двойственную систему, где $k(\mathbf{x}) = P(h(\mathbf{x}))$, и подобрать P так, что семейство векторных полей (11) будет попарно коммутативным. Если такой функции P нет, задача решения не имеет.

3. Согласно теореме Фробениуса, существует такие координаты $\boldsymbol{\xi}$, в которых векторные поля (11) оказываются координатными. При этом управляемая система $\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})u$ в указанных координатах будет иметь канонический вид. В этих же координатах исходная система с выходом будет иметь третий управляемый канонический вид с функцией H , определяемой соотношением $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}} = P$. Замена координат $\mathbf{x} = T(\boldsymbol{\xi})$ определяется уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} = U, \quad (12)$$

где U — матрица управляемости, которая строится по координатам векторных полей (11):

$$U = (B, -\operatorname{ad}_A B, \operatorname{ad}_A^2 B, \dots, (-1)^{n-1} \operatorname{ad}_A^{n-1} B).$$

К этому следует добавить, что в матричном уравнении (12) левая часть типично записывается в новых координатах ξ , а правая часть — в старых x . Для решения этого уравнения необходимо его разделить по столбцам, в результате получится набор автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Альтернативный вариант — перейти к обратным матрицам:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = [U(x)]^{-1}.$$

3. Построение наблюдателя для систем второго порядка

Предполагая, что система с выходом является (локально) наблюдаемой (т.е. матрица наблюдаемости является невырожденной), можем ограничиться рассмотрением систем, представленных в первом наблюдаемом каноническом виде.

Рассмотрим следующую систему второго порядка с выходом:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = F(z_1, z_2); \\ y = z_1. \end{cases} \quad (13)$$

Выясним, при каких условиях на функцию F эта система приводится к третьему каноническому виду. Отметим, забегая вперед, что приводимость к первому каноническому виду локально эквивалентна наблюдаемости системы, в то время как приводимость к третьему каноническому виду — более сильное условие.

Так как матрица наблюдаемости системы (13) имеет простой вид:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Используя соотношение (10), получаем:

$$A(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_2 \\ F(z_1, z_2) \end{pmatrix}, \quad B(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ P(z_1) \end{pmatrix}.$$

Семейство (11) содержит два векторных поля: B и $-\operatorname{ad}_A B$, где

$$\operatorname{ad}_A B = [A, B] = \begin{pmatrix} -P(z_1) \\ P'(z_1)z_2 - F'_{z_2}(z_1, z_2)P(z_1) \end{pmatrix}.$$

В данном случае мы имеем единственное условие коммутирования: $[B, \operatorname{ad}_A B] = 0$. Вычислим коммутатор в этом условии слева:

$$[B, \operatorname{ad}_A B] = \begin{pmatrix} 0 \\ P(z_1)(2P'(z_1) - F''_{z_2 z_2}(z_1, z_2)P(z_1)) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, учитывая, что $P(z_1) \neq 0$, условие $[B, \text{ad}_A B] = 0$ можем записать в следующем виде:

$$2P'(z_1) - F''_{z_2 z_2}(z_1, z_2) P(z_1) = 0,$$

или (вспомнив, что P знакопостоянна и можно считать, что $P(z_1) > 0$)

$$F''_{z_2 z_2}(z_1, z_2) = 2 \frac{d}{dz_1} (\ln P(z_1)).$$

Видно, что функция $F''_{z_2 z_2}(z_1, z_2)$ не зависит от переменной z_2 . Поэтому, с одной стороны, функция $F(z_1, z_2)$ должна иметь вид

$$F(z_1, z_2) = C_0(z_1)z_2^2 + C_1(z_1)z_2 + C_2(z_1),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные гладкие функции одного переменного. С другой стороны, если функция F имеет требуемый вид, то функция $P(z_1)$ находится из простейшего дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz_1} (\ln P(z_1)) = C_0(z_1).$$

Из этого уравнения

$$P(z_1) = C \exp \left(\int_0^{z_1} C_0(z_1) dz_1 \right). \quad (14)$$

Можно выбрать любое значение постоянной C , так как ее изменение означает умножение функции $k(x)$ на постоянную. Полагаем $C = 1$.

Для того, чтобы найти нужную замену переменных сформируем матрицу управляемости:

$$U = (B, -\text{ad}_A B) = \begin{pmatrix} 0 & P(z_1) \\ P(z_1) & (C_0(z_1)z_2 + C_1)P(z_1) \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{C_0(z_1)}{P(z_1)}z_2 - \frac{C_1(z_1)}{P(z_1)} & \frac{1}{P(z_1)} \\ \frac{1}{P(z_1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{z_2}{P(z_1)} - \int \frac{C_1(z_1)}{P(z_1)} dz_1, \\ \xi_2 = \int \frac{1}{P(z_1)} dz_1. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь знак интеграла обозначает любую первообразную соответствующей функции одного переменного.

Замена переменных (15) приводит систему (13) к каноническому виду (6), в котором

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(y) = \begin{pmatrix} \frac{C_2(y)}{P(y)} \\ \int \frac{C_1(y)}{P(y)} dy \end{pmatrix}.$$

Функция H отражает зависимость переменных $y = z_1$ и ξ_2 , которую можно найти из второго уравнения в (15).

4. Построение наблюдателей для двух моделей кардиостимулятора

Первая модель кардиостимулятора. Запишем уравнение (2) в виде системы второго порядка, положив $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$, с выходом $y = x$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\alpha(z_1^2 - \mu)z_2 - \frac{z_1(z_1 + d)(z_1 + e)}{de}; \\ y = z_1. \end{cases} \quad (16)$$

Динамическая система (16) является частным случаем (13) с функцией

$$F_1(z_1, z_2) = -\alpha(z_1^2 - \mu)z_2 - \frac{z_1(z_1 + d)(z_1 + e)}{de}.$$

Функция является линейной по переменной z_2 , при этом

$$C_0 = 0, \quad C_1 = -\alpha(z_1^2 - \mu), \quad C_2 = -\frac{z_1(z_1 + d)(z_1 + e)}{de}.$$

Следовательно, система приводится к третьему каноническому виду и допускает построение наблюдателя с линейной динамикой ошибки.

Из равенства (14) с учетом $C = 1$ находим $P(z_1) = 1$. По формулам (15) находим замену переменных, переводящую систему в канонический вид:

$$\begin{cases} \xi_1 = z_2 + \frac{\alpha}{3}z_1^3 - \alpha\mu z_1, \\ \xi_2 = z_1. \end{cases}$$

Приведенная замена обратима всюду в \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} z_1 = \xi_2, \\ z_2 = \xi_1 - \frac{\alpha}{3}\xi_2^3 + \alpha\mu\xi_2. \end{cases} \quad (17)$$

В переменных ξ динамическая система (16) имеет вид (5), в котором

$$\psi(y) = \begin{pmatrix} -\frac{y(y+d)(y+e)}{ed} \\ \alpha\mu y - \frac{\alpha}{3}y^3 \end{pmatrix}.$$

Для построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки необходимо найти вектор G . Этот вектор определяется выбором двух желаемых собственных значений λ_1, λ_2 матрицы $M_e = D + GC$ в левой полуплоскости. Если эти собственные числа выбраны, то вектор G имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Далее наблюдатель с линейной динамикой ошибки строится по общей формуле (7).

Вторая модель кардиостимулятора. Как и в случае первой модели запишем динамическую систему второго порядка с фазовыми переменными $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$ и выходом $y = x$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\alpha(z_1 - v_1)(z_1 - v_2)z_2 - \frac{z_1(z_1 + d)(z_1 + e)}{de}; \\ y = z_1. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь

$$F_2(z_1, z_2) = -\alpha(z_1 - v_1)(z_1 - v_2)z_2 - \frac{z_1(z_1 + d)(z_1 + e)}{de},$$

функция F_2 линейна по переменной z_2 . Как и выше определяем

$$C_0 = 0, \quad C_1 = -\alpha(z_1 - v_1)(z_1 - v_2), \quad C_2 = -\frac{z_1(z_1 + d)(z_1 + e)}{de}.$$

Таким образом, система (19) приводится к третьему каноническому виду и допускает построение наблюдателя с линейной динамикой ошибки. Соответствующие действия аналогичны тем, что были предприняты в первой модели.

Согласно равенству (14) получаем $P(z_1) = 1$ и по формулам (15) находим замену переменных, переводящую систему в канонический вид:

$$\begin{cases} \xi_1 = z_2 + \frac{\alpha}{6}(2z_1^3 - 3(v_1 + v_2)z_1^2 + 6v_1v_2z_1), \\ \xi_2 = z_1. \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} z_1 = \xi_2, \\ z_2 = \xi_1 - \frac{\alpha}{6}(2\xi_2^3 - 3(v_1 + v_2)\xi_2^2 + 6v_1v_2\xi_2). \end{cases} \quad (20)$$

В переменных ξ динамическая система (19) имеет вид (5), в котором

$$\psi(y) = \begin{pmatrix} -\frac{y(y+d)(y+e)}{de} \\ -\frac{\alpha}{6}(2y^3 - 3(v_1 + v_2)y^2 + 6v_1v_2y) \end{pmatrix}.$$

Выбрав матрицу G по собственным значениям λ_1, λ_2 согласно (18), строим наблюдатель по общей формуле (7).

5. Вычислительные эксперименты

Работоспособность построенного наблюдателя будем проверять путем вычислительного эксперимента. Для этого будем интегрировать систему дифференциальных уравнений, полученную объединением системы (16) (или (19)) с системой (7). Однако при этом следует иметь в виду, что вектор η является оценкой вектора ξ , т.е. состояния системы в канонической системе координат. Для сравнения векторов z и η последний следует преобразовать согласно замене (17) (или (20) для второй модели).

В вычислительном эксперименте с системой (16) были взяты следующие значения параметров:

$$\alpha = 1; \quad \mu = 1; \quad d = 3,0; \quad e = 3,5.$$

Наблюдатель строился с собственными значениями

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Использованы следующие начальные условия для переменных модели и наблюдателя [5]:

$$x(0) = -0,1; \quad \dot{x}(0) = -0,2; \quad \eta_1(0) = -0,1; \quad \eta_2(0) = -1.$$

На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования системы (16). Как видно, погрешность оценивания переменной z_2 стремится к нулю. Она попадает в окрестность $|e| < \delta_e = 0.01$ за время $t = 3.69$.

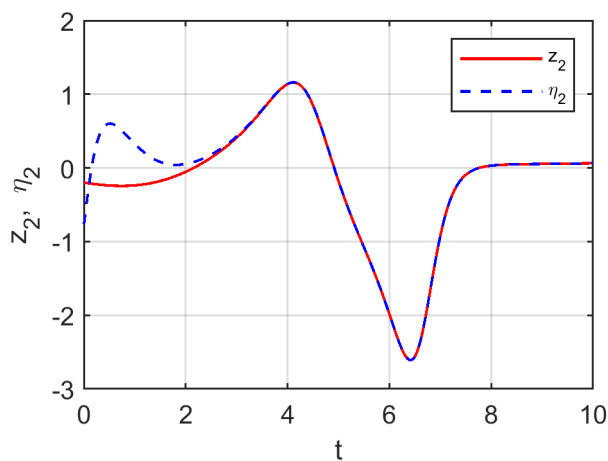


Рис. 1. Скорость трансмембранного потенциала z_2 и его оценка наблюдателем η_2 в модели (16)

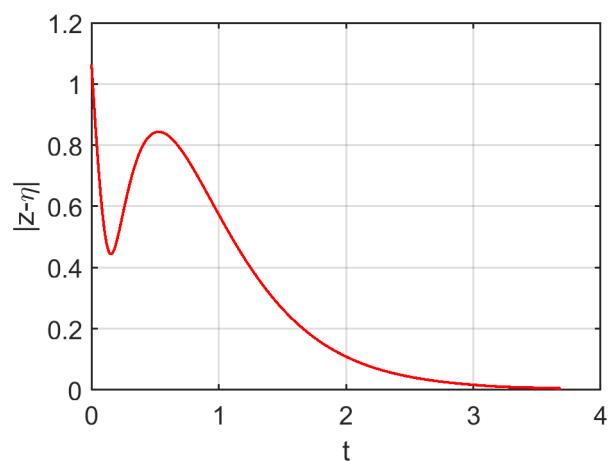


Рис. 2. Динамика погрешности оценивания e_2 в модели (16)

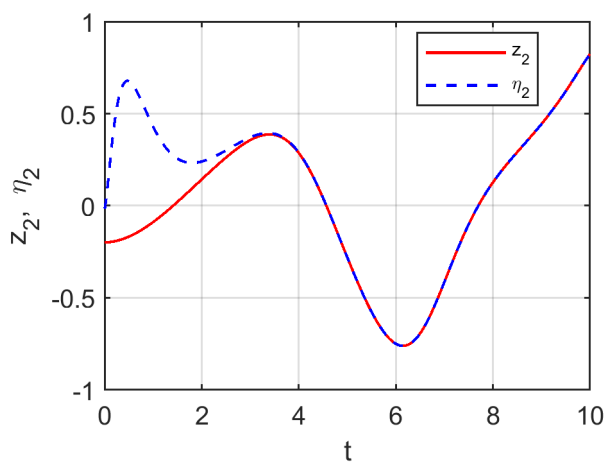


Рис. 3. Скорость трансмембранного потенциала z_2 и его оценка наблюдателем η_2 в модели (19)

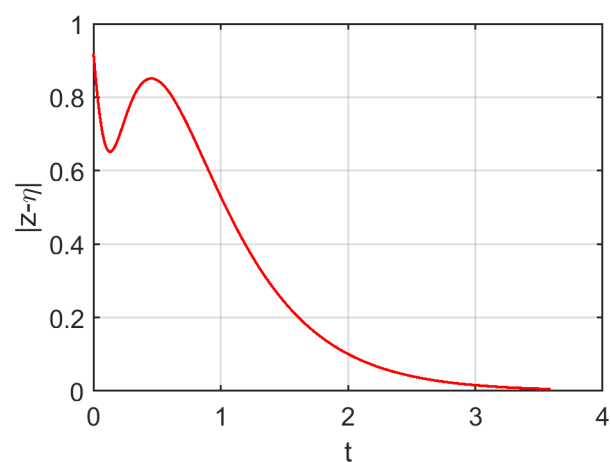


Рис. 4. Динамика погрешности оценивания e_2 в модели (19)

В вычислительном эксперименте с системой (19) были взяты следующие значения параметров:

$$\alpha = 1; \quad v_1 = 0,9; \quad v_2 = -0,5; \quad d = 3,0; \quad e = 3,5.$$

Собственные значения и начальные условия выберем те же, что и в предыдущем эксперименте. На рис. 3, 4 представлены результаты моделирования системы (19). Отметим, что динамика погрешности оценивания полностью определяется коэффициентами λ_1 , λ_2 и начальными значениями переменных e_1 и e_2 . В данном случае погрешность оценивания попадает в окрестность $|e| < \delta_e = 0.01$ за то же время $t = 3.69$, что и в предыдущем эксперименте.

Результаты моделирования показывают работоспособность наблюдателя состояния с линейной динамикой ошибки для двумерной динамической системы на основе уравнения Ван дер Поля, которая рассматривалась как модель динамики трансмембранного потенциала кардиостимулятора. Он позволяет получить адекватную оценку скорости изменения потенциала. Время переходного процесса для наблюдателя регулируется коэффициентами λ_1 , λ_2 , их увеличение по абсолютной величине уменьшает время переходного процесса.

Заключение

В работе рассмотрена задача построения наблюдателя состояния для модели кардиостимулятора, основанной на нелинейном осцилляторе Ван дер Поля. Был выбран наблюдатель состояния с линейной динамикой ошибки. Условием синтеза такого наблюдателя является приведение исходной динамической системы к специальному каноническому виду.

В работе была рассмотрена общая задача о построении наблюдателя с линейной динамикой ошибки для произвольной двумерной динамической системы. Необходимым условием существования наблюдателя является ранговое условие наблюдаемости. В работе получены необходимые и достаточные условия существования наблюдателя, а также разработан алгоритм построения наблюдателя.

Результаты, полученные для двумерной динамической системы общего вида, были применены в задаче синтеза наблюдателя для двух моделей кардиостимулятора. Итоговые результаты были протестированы в ходе вычислительного эксперимента.

Наблюдатель состояния с линейной динамикой ошибки относится к классу асимптотических. Для таких наблюдателей погрешность оценивания стремится к нулю при неограниченном возрастании времени. Динамика погрешности e для рассматриваемого наблюдателя подчиняется простому закону $\dot{e} = (D + GC)e$, где матрицы D и C фиксированные и определяются каноническим видом наблюдаемой системы, а матрица-столбец G позволяет регулировать скорость сходимости погрешности к нулю. Время, за которое погрешность достигнет заданной величины, для асимптотического наблюдателя определить нельзя, поскольку на него влияет неизвестное начальное отклонение наблюдателя от истинного со-

стояния объекта. Можно лишь вычислить время, за которое погрешность уменьшится в заданное число раз.

Построенный наблюдатель в работе является асимптотическим. Это значит, что погрешность оценки состояния стремится к нулю при неограниченном увеличении времени: $e = x(t) - \eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Для практики представляет интерес оценка времени, за которое эта погрешность не будет превышать заданной величины, которой можно пренебречь. Построенный наблюдатель имеет линейную динамику ошибки: $\dot{e} = (D + GC)e$. Поэтому на скорость убывания погрешности можно влиять путем выбора собственных чисел λ_1, λ_2 . Однако назвать точное время невозможно, так как неизвестна начальная погрешность. Можно лишь найти время, за которое погрешность уменьшится в заданное число раз.

На погрешность наблюдателя также влияют погрешности интегрирования дифференциальных уравнений, которые в практических ситуациях присутствуют всегда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-07-00269 и 19-07-00817). Авторы благодарят С.Б. Ткачева за ценные консультации.

Список литературы

1. Einthoven W.G., Fahr G., de Waart A.A.J. Uber die Richtung und die manifeste Grosse der Potentialschwankungen im menschlichen Herzen und uber den Einfluss der Herzlage auf die Form des Elektrokardiogramms // Pfluger's Archiv fur die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere. 1913. Bd 150. No. 6-8. S. 275–315. DOI: [10.1007/BF01697566](https://doi.org/10.1007/BF01697566)
2. Van der Pol B., van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // Ser. 7: The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and J. of Science. 1928. Vol. 6, no. 38. Suppl. Pp. 763–775. DOI: [10.1080/14786441108564652](https://doi.org/10.1080/14786441108564652)
3. Nazari S., Heydari A., Khaligh J. Modified modeling of the heart by applying nonlinear oscillators and designing proper control signal // Applied Mathematics. 2013. No. 4. Pp. 972–978. DOI: [10.4236/am.2013.47134](https://doi.org/10.4236/am.2013.47134)
4. Ryzhii E., Ryzhii M. Modeling of heartbeat dynamics with a system of coupled nonlinear oscillators // Biomedical informatics and technology: 1st Intern. conf. on biomedical informatics and technology: ACBIT 2013 (Aizu-Wakamatsu, Japan, Sept. 16-17, 2013): Revised selected papers. B.; Hdbl.: Springer, 2014. Pp. 66–75. DOI: [10.1007/978-3-642-54121-6_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54121-6_6)
5. Grudzinski K., Zebrowski J.J. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A. 2004. Vol. 336, no. 1-2. Pp. 153–162. DOI: [10.1016/j.physa.2004.01.020](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.020)
6. Zebrowski J.J., Grudzinski K., Buchner T., Kuklik P., Gac J., Gielerak G., Sanders P., Baranowski R. Nonlinear oscillator model reproducing various phenomena in the dynamics of the conduction system of the heart // Chaos. 2007. Vol 17, no. 1. Article 015121. DOI: [10.1063/1.2405128](https://doi.org/10.1063/1.2405128)

7. Gois S.R.F.S.M., Savi M.A. An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009. Vol. 41, no. 5. Pp. 2553–2565. DOI: [10.1016/j.chaos.2008.09.040](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.040)
8. Петров В.С., Осипов Г.В. Влияние пассивных элементов на синхронизацию осцилляторных ансамблей // *Изв. высш. учеб. заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 3. С. 46–59. DOI: [10.18500/0869-6632-2010-18-3-46-59](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-3-46-59)
9. Das S., Maharatna K. Fractional dynamical model for the generation of ECG like signals from filtered coupled Van-der Pol oscillators // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2013. Vol. 112, no. 3. Pp. 490–507. DOI: [10.1016/j.cmpb.2013.08.012](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.08.012)
10. Abbasi M., Javed A., Shahid M.B. Forced Van der Pol oscillator based modeling of cardiac pacemakers // 2012 Cairo Intern. Biomedical Engineering Conf.: CIBEC-2012 (Giza, Egypt, December 20-22, 2012): Proc. N.Y.: IEEE, 2013. Pp. 166-170. DOI: [10.1109/CIBEC.2012.6473294](https://doi.org/10.1109/CIBEC.2012.6473294)
11. Мурашко В.В., Струтынский А.В. Электрокардиография: учеб. пособ. 14-е изд.. М.: МЕДпресс-информ, 2017. 360 с.
12. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
13. Besancon G. An overview on observer tools for nonlinear systems // *Nonlinear observers and applications*. B.; HdbI.: Springer, 2007. Pp. 1–33. DOI: [10.1007/978-3-540-73503-8_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73503-8_1)
14. Bestle D., Zeitz M. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems // *Intern. J. of Control*. 1983. Vol. 38, no. 2. Pp. 419–431. DOI: [10.1080/00207178308933084](https://doi.org/10.1080/00207178308933084)
15. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Принцип разделения для аффинных систем // *Дифференциальные уравнения*. 2001. Т. 37, № 11. С. 1468–1475.
16. Краснощёченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
17. Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Nonlinear $k(x)$ -dual systems and observer design // *IFAC Proc. Volumes*. 2001. Vol. 34, no. 6. Pp. 1365–1370. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)35378-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35378-8)
18. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers // *Systems & Control Letters*. 1983. Vol. 3, no. 1. Pp. 47–52. DOI: [10.1016/0167-6911\(83\)90037-3](https://doi.org/10.1016/0167-6911(83)90037-3)
19. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 492 с.
20. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления / Я.Я. Александрин и др.; под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1990. 334 с.



State Observer for the Pacemaker Model Based on the Van der Pol Equation

M. S. Vinogradova¹, A. N. Kanatnikov¹, O. S. Tkacheva^{1,2,*}

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow

²V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow

* mathmod@bmstu.ru

Keywords: Pacemaker, state observer, observer error, canonical observability form, Van der Pol equation

Received: 09.03.2020.

A Dutch physiologist and a founder of electrocardiography V. Einthoven [10] proposed the first known model of the cardiac electrical activity. Later, van der Pol and van der Mark [11] developed a model of the heart, where the heartbeat is considered as a relaxation oscillation. From this point of view, to model the operation of pacemakers, the van der Pol equation [14,15,19] can be useful. The paper offers modeling of only one heart node that is the S-A (sinoatrial) node, which is the main heart pacemaker [20].

Many control algorithms for dynamic systems are based on feedback, which involves the full state vector of a dynamic system. However, in practice, the full state vector is not always known. So, in the case of cardiac electrical activity, the potentials of the nodes rather than their changing rates are measured. To restore the full state vector from existing measurements, state observers are often used.

In this paper, we solve the task of constructing an observer with linear error dynamics [22,25]. A necessary condition for the existence of such an observer is the system observability. The sufficient conditions can be formulated in the framework of the differential-geometric approach [25] using the ideas of duplicity [25,26]. Within this approach, an algorithm for observer construction can be developed. In the paper, a general problem to construct an observer for two-dimensional systems is solved and the results obtained are applied to the pacemaker model based on the Van der Pol oscillator. The numerical simulation enables us to illustrate operation of the observer developed.

References

1. Einthoven W.G., Fahr G., de Waart A.A.J. Über die Richtung und die manifeste Grosse der Potentialschwankungen im menschlichen Herzen und über den Einfluss der Herzlage auf die

Form des Elektrokardiogramms. *Pfluger's Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*, 1913, Bd 150, no. 6-8, s. 275–315. DOI: [10.1007/BF01697566](https://doi.org/10.1007/BF01697566)

2. Van der Pol B., van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Philosophical Magazine. Ser. 7: The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and J. of Science*, 1928, vol. 6, no. 38, suppl., pp. 763–775. DOI: [10.1080/14786441108564652](https://doi.org/10.1080/14786441108564652)
3. Nazari S., Heydari A., Khaligh J. Modified modeling of the heart by applying nonlinear oscillators and designing proper control signal. *Applied Mathematics*, 2013, no. 4, pp. 972–978. DOI: [10.4236/am.2013.47134](https://doi.org/10.4236/am.2013.47134)
4. Ryzhii E., Ryzhii M. Modeling of heartbeat dynamics with a system of coupled nonlinear oscillators. *Biomedical informatics and technology: 1st Intern. conf. on biomedical informatics and technology: ACBIT 2013* (Aizu-Wakamatsu, Japan, Sept. 16-17, 2013): Revised selected papers. B.; Hdbl.: Springer, 2014. Pp. 66–75. DOI: [10.1007/978-3-642-54121-6_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54121-6_6)
5. Grudzinski K., Zebrowski J.J. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A*, 2004, vol. 336, no. 1-2, pp. 153–162. DOI: [10.1016/j.physa.2004.01.020](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.020)
6. Zebrowski J.J., Grudzinski K., Buchner T., Kuklik P., Gac J., Gielerak G., Sanders P., Baranowski R. Nonlinear oscillator model reproducing various phenomena in the dynamics of the conduction system of the heart. *Chaos*, 2007, vol 17, no. 1, article 015121. DOI: [10.1063/1.2405128](https://doi.org/10.1063/1.2405128)
7. Gois S.R.F.S.M., Savi M.A. An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 41, no. 5, pp. 2553–2565. DOI: [10.1016/j.chaos.2008.09.040](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.040)
8. Petrov V.S., Osipov G.V. Influence of passive elements on the synchronization of oscillatory ensembles. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenij. Prikladnaia nelinejnaja dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2010, vol. 18, no. 3, pp. 46–59. DOI: [10.18500/0869-6632-2010-18-3-46-59](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-3-46-59) (in Russian)
9. Das S., Maharatna K. Fractional dynamical model for the generation of ECG like signals from filtered coupled Van-der Pol oscillators. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2013, vol. 112, no. 3, pp. 490–507. DOI: [10.1016/j.cmpb.2013.08.012](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.08.012)
10. Abbasi M., Javed A., Shahid M.B. Forced Van der Pol oscillator based modeling of cardiac pacemakers. *2012 Cairo Intern. Biomedical Engineering Conf.: CIBEC-2012* (Giza, Egypt, December 20-22, 2012): Proc. N.Y.: IEEE, 2013. Pp. 166–170. DOI: [10.1109/CIBEC.2012.6473294](https://doi.org/10.1109/CIBEC.2012.6473294)
11. Murashko V.V., Strutynskij A.V. *Elektrokardiografiia* [Electrocardiography]: a textbook. 14th ed. Moscow: MEDpress-inform Publ., 2017. 360 p. (in Russian).

12. Korovin S.K., Fomichev V.V. *Nablyudateli sostoianiia dlia lineynykh sistem s neopredelenost'yu* [State observers for linear systems with uncertainty]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2007. 224 p. (in Russian).
13. Besancon G. An overview on observer tools for nonlinear systems. *Nonlinear observers and applications*. B.; Hdbk.: Springer, 2007. Pp. 1–33. DOI: [10.1007/978-3-540-73503-8_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73503-8_1)
14. Bestle D., Zeitz M. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *Intern. J. of Control*, 1983, vol. 38, no. 2, pp. 419–431. DOI: [10.1080/00207178308933084](https://doi.org/10.1080/00207178308933084)
15. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. A separation principle for affine systems. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1541–1548. DOI: [10.1023/A:1017908630261](https://doi.org/10.1023/A:1017908630261)
16. Krasnoshchchenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow: BMSTU Publ., 2005. 520 p. (in Russian).
17. Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Nonlinear $k(x)$ -dual systems and observer design. *IFAC Proc. Volumes*, 2001, vol. 34, no. 6, pp. 1365–1370. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)35378-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35378-8)
18. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 1983, vol. 3, no. 1, pp. 47–52. DOI: [10.1016/0167-6911\(83\)90037-3](https://doi.org/10.1016/0167-6911(83)90037-3)
19. Solodovnikov V.V., Plotnikov V.N., Iakovlev A.V. *Teoriia avtomaticheskogo upravleniia tekhnicheskimi sistemami* [Theory of automatic control of technical systems]: a textbook. Moscow: BMSTU Publ., 1993. 492 p. (in Russian).
20. *Avtomatizirovannoe proektirovanie sistem avtomaticheskogo upravleniia* [Computer-aided design of automatic control systems] / Ia.Ia. Aleksankin a.o.; ed. by V.V. Solodovnikov. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1990. 334 p. (in Russian).